1. Was ist Spieltheorie?

(a) Wie kommt es zum Namen?

Geburtsstunde **Spieltheorie** 1944: John von Neumann und Oskar Morgenstern: "The Theory of Games and Economic Behavior". (Es gab eine Reihe von Vorläufern.)

Von Anfang an gesehen: Parallelen zwischen Gesellschaftsspielen wie Schach, Poker, Mensch ärgere dich nicht, ... und Entscheidungsproblemen in der Ökonomie und Politik.

(b) Was ist das Gemeinsame dieser Probleme?

- wenige Entscheidungsträger (nicht einer, nicht viele)
- Der Nutzen (Kosten, Gewinn) eines Entscheidungsträgers ist abhängig von den Handlungen anderer

$\updownarrow$

Interdependenzen, externe Effekte

Aus den Interdependenzen resultiert (im Allgemeinen!) ein **Interessenkonflikt**.

Also bessere Bezeichnung „Konflikttheorie“?

(c) Einordnung der Spieltheorie?

- Teilgebiet der Mikroökonomie
- Teilgebiet der Entscheidungstheorie oder umgekehrt!?
- Entscheidungstheorie = Einpersonenspiele
  = Spiele gegen die Natur
- Spieler = Entscheidungsträger (Einzelpersonen, Haushalte, Firmen, Verbände, Staat,...)

(d) Unterteilung der Spieltheorie

- kooperative Theorie (effizientes Handeln per Absprachen gesichert, es bleiben Verteilungsfragen)
- nichtkooperative Theorie (keine Absprachen, meistens keine Effizienz, Grundproblem: Was ist rationales Handeln?)

(e) Gibt es typische Konflikte?

- Man kann eine Reihe von "typischen Situationen" entwerfen und versuchen, sie in möglichst großer Einfachheit darzustellen: Eben das hat die Spieltheorie auch getan, allerdings mit manchmal etwas abstrusen Einkleidungen und Namen!
- Typische Situationen werden **mit den Methoden** der Spieltheorie analysiert, dienen aber auch oft dazu, die Methoden der Spieltheorie zu hinterfragen.
- "Lösung" hat in der Spieltheorie die Bedeutung eines **normativen** Konzeptes der Verhaltensbeschreibung.
- Was heißt normativ? (später)

2. Matrixspiele, Spiele in Normalform

Beispiele für 2 x 2-Spiele, Nash-Gleichgewicht

(a) Welches sind die Elemente eines Spiels in Normalform (speziell: eines Matrixspiels)?

(i) Spieler

(ii) Strategien (vollständige Verhaltenspläne)

(iii) Nutzen der Spieler bei jeder möglichen Kombination von Strategien

- Endlich viele Spieler (bei Matrixspielen: 2 Spieler)
- Endlich viele Strategien
- 2 x 2-Spiele: 2 Spieler, jeder hat zwei Strategien
- Darstellung mit Hilfe einer (Bi-)Matrix

Spieler 1

		Strategie 1	Strategie 2	
Spieler 2	Strategie 1	u_1^{11} / u_2^{11}	u_1^{21} / u_2^{21}	← Nutzen von Spieler 1 ← Nutzen von Spieler 2
	Strategie 2	u_1^{12} / u_2^{12}	u_1^{22} / u_2^{22}	

Alle Spieler wählen gleichzeitig und unabhängig von einander ihre Strategie

(b) Beispiel 2 x 2-Spiel: Prisoners' Dilemma

- Viele Einkleidungen, viele Beispiele:
  ein Grundproblem der Kooperation
- Originalgeschichte: 2 Personen haben gemeinsam einen Einbruch begangen, sie sind verdächtig, aber es gibt keine Beweise. Beide sind wegen unerlaubten Waffenbesitzes in Haft. Wenn einer gesteht, kann er als Kronzeuge auftreten und wird freigesprochen - der andere erhält 5 Jahre Gefängnis. Wenn keiner gesteht, dann wandern beide 1 Jahr ins Gefängnis. Wenn beide gestehen, kann keiner den Kronzeugen spielen, und beide erhalten 3 Jahre Gefängnis.

  Annahme: 5 Jahre $\Rightarrow u_i = 0$, 3 Jahre $\Rightarrow u_i = 2$
  1 Jahr $\Rightarrow u_i = 4$, 0 Jahre $\Rightarrow u_i = 5$

Spieler 1

		nicht gestehen	gestehen
Spieler 2	nicht gestehen	4 / 4	5 / 0
	gestehen	0 / 5	2 / 2

- Eine (von vielen möglichen) bessere Geschichte für dieses Spiel: Zwei Fischer befischen unabhängig voneinander einen See. Sie können ein feinmaschiges oder ein grobmaschiges Netz benutzen. Wählen beide ein feinmaschiges Netz, werden auch die meisten Jungfische weggefangen. Beide machen einen (langfristigen) Gewinn von 2. Nehmen beide ein grobmaschiges Netz machen beide einen (langfristigen) Gewinn von 4. Wählt Fischer 1 ein feinmaschiges und Fischer 2 ein grobmaschiges Netz, dann macht 1 einen Gewinn von 5 und 2 einen Gewinn von 0 (und umgekehrt).
- Überlegen Sie sich selbst weitere plausible Geschichten mit dieser Struktur, z. B. zwei Firmen, die dasselbe Produkt anbieten (Strategien?), zwei Jäger, die ein gefährliches Wild jagen (wie "mutig"?), zwei Studenten, die eine gemeinsame Seminararbeit schreiben (wie viel Arbeit?), usw..
- Mögliche Fragen:

  (i) Wie **werden** die beiden spielen?

  → Deskriptive (explikative) Theorie

  → Beobachtungen, Experimente

  (ii) Wie **sollten** die beiden spielen?

  → normativ/moralische Forderung

  → ist zu definieren (z. B. abgeleitet aus Kategorischem Imperativ)

  (iii) Welche Verhaltensweise ist **rational**?

  → manchmal präskriptiv genannt

  → ist zu definieren

(iii) ist das Hauptthema der Spieltheorie. **Rationalität ist nichts Gegebenes, sondern etwas zu Definierendes!** In der Diskussion von Rationalität spielen aber (i) und (ii) auch eine Rolle. Also:

Was ist Rationalität?

- **Ziel** der einzelnen Spieler ist **Nutzenmaximierung**.
- Ist damit rationales Verhalten nicht bereits definiert? **Nein!** Wegen der externen Effekte, die alle aufeinander ausüben, muß man immer auch die Ziele der anderen im Auge haben. (Nicht zu verwechseln mit Altruismus!)
- Rationales Verhalten wird in der Spieltheorie **neu** definiert. Eine solche Definition heißt **Lösungskonzept** oder **Lösung**.

(c) Ein Kriterium für vernünftiges Verhalten

Im Prisoners' Dilemma ist "gestehen" immer besser als "nicht gestehen", gleich wozu sich der andere entscheidet.

Man sagt: "nicht gestehen" ist eine strikt dominierte Strategie.

Allgemeine Definition: Wenn eine Strategie s_i von einem der Spieler bei **allen** Strategiekombinationen der anderen Spieler zu einer **niedrigeren** Auszahlung führt als s_j, dann nennt man s_i eine **strikt dominierte** Strategie.

Abschwächung: s_i heißt **schwach dominiert**, wenn s_i bei keiner Strategiekombination der anderen zu einer höheren Auszahlung als s_j führt.

Rationalitätsforderung: Kein Spieler wählt eine strikt dominierte Strategie.

Konsequenz für Prisoners' Dilemma:

Beide wählen " gestehen".

- Beurteilung der Situation aus der Sicht "moralisch-normativ"?
- Beurteilung solchen Verhaltens aus der Sicht einer deskriptiven Theorie?

(d) Erweiterung des Kriteriums

- Reicht das Kriterium „Aussondern von strikt dominierten Strategien“, um das Verhalten der Spieler eindeutig zu bestimmen?

  Abwandlung des obigen Spiels (der Auszahlung)

		Spieler 1	
		C	D
Spieler 2	C	**6** 4	5 0
	D	0 5	2 2

Bezeichnung der Strategien C = „cooperate“

und D = „defect“,

ersetzen in dieser Darstellung „nicht gestehen“ und „gestehen“.

Wie vorher: Die Strategie C von Spieler 2 wird durch D strikt dominiert.

Anders: Die Strategie C von Spieler 1 wird nicht dominiert.

Trotzdem können wir wie folgt argumentieren: Spieler 2 wird niemals C spielen, weil C strikt dominiert ist. Wir können also C von Spieler 2 „streichen“! Dann ist aber D von Spieler 1 besser!

Anders gesagt: In dem Spiel, das nach dem Streichen von Strategie C von Spieler 2 übrigbleibt, wird Strategie C von Spieler 1 strikt dominiert. Man nennt diese Verfahrensweise: **Sukzessive Elimination von strikt dominierten Strategien.**

- Reicht diese Verfahrensweise aus, um das Verhalten der Spieler eindeutig zu bestimmen?

Noch mal Abwandlung des obigen Spiels

		Spieler 1	
		C	D
Spieler 2	**C**	**6** **6**	5 0
	D	0 5	2 2

Nun gibt es keine dominierten Strategien mehr! Wir brauchen also ein weitergehendes Lösungskonzept.

(e) Beste Antwort

Stellen wir uns für einen Augenblick vor, wir könnten Gedanken lesen. Wir wissen, was unsere Mitspieler tun werden! (Man nennt diese Fähigkeit auch „Rationale Erwartungen“. Sie werden in Ihrem Studium noch mehrfach auf diesen Begriff treffen.) Was sollen wir dann tun?

Definition für m Spieler: Sind die Strategien s_j aller m-1 Spieler $j \neq i$ festgelegt, dann heißt $\tilde{s}_j$ eine beste Antwort auf $s_{-j} = (s_1, \ldots, s_{j-1}, s_{j+1}, \ldots, s_m)$, wenn $u_j(\tilde{s}_j, s_{-j}) \geq u_j(s_j, s_{-j})$ für alle Strategien s_i von Spieler *j*.

Beispiel von oben:

		Spieler 1: C	Spieler 1: D
Spieler 2	C	6 / 6	5 / 0
	D	0 / 5	2 / 2

Die beste Antwort von Spieler 1 auf C von Spieler 2 ist C, die beste Antwort auf D von Spieler 2 ist D. Die beste Antwort von Spieler 2 auf C von Spieler 1 ist C, die beste Antwort auf D von Spieler 1 ist D.

- Bringt uns das weiter?

Stellen wir uns vor, Spieler 1 erwartet, dass Spieler 2 D spielt, und Spieler 2 erwartet, dass Spieler 1 C spielt. Werden diese Erwartungen erfüllt? **Nein!** Die beste Antwort von Spieler 1 auf D von Spieler 2 ist D! Dies sind also keine Erwartungen, die sich erfüllen können.

Stellen wir uns vor, Spieler 1 erwartet, dass Spieler 2 D spielt und Spieler 2 erwartet, dass Spieler 1 D spielt. Werden diese Erwartungen erfüllt? **Ja!** Die Strategien sind jeweils die besten Antworten auf die Erwartungen.

Ein solches Paar von Strategien, die sich gegenseitig bestätigen, d.h. die beste Antworten aufeinander sind, heißt **Nashgleichgewicht** in reinen Strategien.

(f) Nashgleichgewicht

Definition für m Spieler: Eine Strategienkombination $s^* = (s_1^*, \ldots, s_m^*)$ heißt Nashgleichgewicht, wenn s_i^* beste Antwort ist auf s_{-i}^* für alle *i* = 1, ..., *m*.

- Wie finden wir Nashgleichgewichte?

Einfachste Methode: Alle besten Antworten bestimmen, bei jeder Strategienkombination prüfen, ob sie selbstbestätigend ist.

Im obigen Beispiel:

(C, C) und (D, D) sind Nashgleichgewichte (selbstbestätigend, beste Antworten aufeinander)

(C, D) und (D, C) sind keine Nashgleichgewichte

- Bei 2 x 2 Spielen: **Abweichungsdiagramm** zeichnen

		Spieler 1: C	Spieler 1: D
Spieler 2	C	6 / 6	5 / 0
	D	0 / 5	2 / 2

Der Pfeil bedeutet:
Wenn Spieler 1 D spielt, dann ist es für Spieler 2 besser D zu spielen.

Vollständiges Abweichungsdiagramm:

		Spieler 1: C	Spieler 1: D
Spieler 2	C	6 / 6	5 / 0
	D	0 / 5	2 / 2

Wir sehen hieraus sofort, dass (C, C) und (D, D) Nashgleichgewichte sind.

- Beispiel Prisoners' Dilemma (siehe oben)

		Spieler 1: C	Spieler 1: D
Spieler 2	C	4 / 4	5 / 0
	D	0 / 5	2 / 2

Einziges Nashgleichgewicht: (D, D)

↓ ↓ heißt: Strategie C von Spieler 2 wird durch D strikt dominiert

→ → heißt entsprechendes für Spieler 1

Spezialfall:

		Spieler 1: Str.1	Spieler 1: Str.2
Spieler 2	Str.1	• / •	• / 5
	Str. 2	• / •	• / 5

Der Doppelpfeil bedeutet: Wenn Spieler 1 Str. 2 wählt, dann ist Spieler 2 indifferent zwischen Str. 1 und Str. 2.

- Zurück zur Vorstellung „Gedanken lesen“

Ist das wirklich nötig?

Wenn es genau ein Nashgleichgewicht gibt: Nein!

Es gibt nur ein Paar von konsistenten, sich selbst bestätigenden Erwartungen.

Aber wenn es mehr als ein Nashgleichgewicht gibt?

Was tun? Was erwarten? Später!

Vorher weitere Beispiele von 2 x 2 Spielen.

(g) Kampf der Geschlechter

(bereits gesagt: die Benennungen sind oft abstrus)

Geschichte dazu: Ein Paar möchte einen gemeinsamen Abend verbringen, dabei stehen zwei Möglichkeiten zur Auswahl: Einen Boxkampf ansehen (Strategie B) oder ins Konzert gehen (Strategie K). Unglücklicherweise haben sie sich am Morgen nicht einigen können und unglücklicherweise gibt es tagsüber keine Möglichkeit, miteinander in Verbindung zu treten. Abends wählen also beide unabhängig voneinander ihre Strategie. Die folgende Bewertung zeigt, dass sie auf jeden Fall den Abend gemeinsam verbringen wollen.

		Mann	
		B	K
Frau	B	2 / 1	0 / 0
	K	0 / 0	1 / 2

Also zwei Nashgleichgewichte, das eine besser für den Mann, das andere besser für die Frau.

Besserer Name für dieses Spiel: „Koordinationsspiel mit unterschiedlichen Interessen“ Ein Koordinationsspiel mit gleichen Interessen haben wir oben betrachtet.

Aufgabe: Denken Sie sich eine plausiblere Einkleidung für dieses Spiel aus!

(h) Game of Chicken/Taube-Falke-Spiel

Chicken = Feigling

Taube = friedfertiges Individuum

Falke = aggressives Individuum

Geschichte dazu: Zwei Jugendliche rasen in Autos aufeinander zu. Wer ausweicht, hat verloren.

Strategien: F = friedlich = im letzten Augenblick ausweichen,

A = aggressiv = auf keinen Fall ausweichen

		Spieler 1	
		F	A
Spieler 2	F	1 / 1	2 / 0
	A	0 / 2	-1 / -1

Also wieder zwei Nashgleichgewichte, wieder „Koordinationsspiel mit unterschiedlichen Interessen“.

Kein Unterschied zu Kampf der Geschlechter? (Nach Umbenennung der Strategien von einem der Spieler erhalten wir die Gleichgewichte ebenfalls in der Diagonalen.)

Doch, es gibt einen Unterschied: Beim Kampf der Geschlechter haben wir beim „Verpassen der Nashgleichgewichte“ Symmetrie, hier nicht!

Ist das wichtig? Später!

Andere bessere Einkleidung:

Zwei Tiere kämpfen um ein Revier, dabei können sie eine aggressive Strategie A oder eine vorsichtige (friedfertige) Strategie F verfolgen. (A, A) ergibt einen blutigen Kampf mit unsicherem Ausgang, (F, F) einen unblutigen mit unsicherem Ausgang, bei (F, A) gewinnt Spieler 2 mit Sicherheit und umgekehrt.

Aufgabe: Denken Sie sich eine Einkleidung mit ökonomischem Hintergrund aus!

(i) Matching Pennies

Geschichte dazu: Spieler 1 legt einen Pfennig entweder mit Kopf oder Zahl auf den Tisch, verdeckt ihn aber mit der flachen Hand. Spieler 2 rät, welche Seite oben liegt. Hat Spieler 2 recht, gewinnt er den Pfennig; hat er unrecht, muss er Spieler 1 einen Pfennig geben.

		Spieler 1: **K**	Spieler 1: Z
Spieler 2	**K**	-1, 1	1, -1
	Z	1, -1	-1, 1

K = Kopf
Z = Zahl

Also: Kein Nashgleichgewicht in reinen Strategien.

Also neues Problem! Wir hatten bereits das Problem, dass es mehr als ein Nashgleichgewicht geben kann. Schlimmer scheint zu sein, dass wir gar keins haben! Was tun? (Später)

Aufgabe: Denken Sie sich eine andere Geschichte aus, die zur selben Auszahlungsstruktur führt.

3. Gemischte Strategien

Lassen Sie uns das folgende Beispiel eines Matrixspiels betrachten.

		Spieler I: T_1	T_2	T_3
Spieler II	S_1	10, 4	0, 3	3, 1
	S_2	0, 5	10, 2	3, 10

Gibt es dominierte Strategien? Einzeln ansehen!

S_1? S_2? Nein!

T_1? T_2? T_3? Nein!

Gibt es ein Nashgleichgewicht? Einzelne Strategiekombination ansehen! (S_1, T_1)? Nein! usw.

Alternative: Abweichungsdiagramm

Spieler I

		T_1	T_2	T_3
Spieler II	S_1	10 / 4	0 / 3	4 / 1
	S_2	0 / 5	10 / 2	3 / 10

Also: Es gibt kein Nashgleichgewicht.

Anmerkung: Bei größeren Matrixspielen ist das Abweichungsdiagramm oft unübersichtlich und man verzichtet darauf. Statt dessen gibt es andere Möglichkeiten, die beste Antwort zu kennzeichnen.

Sehen wir uns die Auszahlung von Spieler I etwas genauer an:

Strategie T_1 und T_2 ermöglichen viel höhere Auszahlungen als T_3. Kann man das nicht ausnutzen? Vorschlag: Wir werfen eine Münze und entscheiden uns je nach Ergebnis für T_1 oder T_2. Was ergibt sich daraus?

Spieler I

		T_1	T_2	T_3	Münzwurf
Spieler II	S_1	10 •	0	4 •	5 •
	S_2	0 •	10 •	3 •	5 •

Erwartungswert, wenn Spieler II S_1 wählt: $\frac{1}{2}\cdot 10+\frac{1}{2}\cdot 0=5$

Erwartungswert, wenn Spieler II S_2 wählt: $\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 10=5$

Wenn wir die künstliche Strategie "Münzwurf" einführen, so wird T_3 dominiert! Wir sollten T_3 nicht verwenden, sondern uns auf T_1 und T_2 konzentrieren!

Wichtige Annahme dabei: Die Spieler haben eine Bewertungsfunktion (Nutzenfunktion), durch die sich Entscheidungen unter Risiko mit dem Erwartungswert (Erwartungsnutzen) bewerten lassen.

Also konzentrieren wir uns beim obigen Spiel auf T_1 und T_2 und wir akzeptieren, dass Strategien mit gewissen Wahrscheinlichkeiten gewählt werden können und dass die Bewertung von resultierenden Situationen durch Erwartungswerte erfolgen.

Definition: Seien $s_1^i,\dots,s_n^i$ reine Strategien des Spielers i. $\left(p_1^i,p_2^i,\dots,p_n^i\right)$ mit $p_j^i \geq 0,\ \sum_j p_j^i = 1$ heißt eine **gemischte Strategie** von Spieler i.

Speziell: (1, 0, 0, ... 0) entspricht S_1^i

(0, 1, 0, ... 0) entspricht S_2^i

Zurück zum obigen Beispiel (wobei T_3 mit Wahrscheinlichkeit 0 gewählt wird):

			Spieler I	
			T_1	T_2
			p	1-p
Spieler II	S_1	q	10 / 4	0 / 1
	S_2	1-q	0 / 7	10 / 0

Wählen die Spieler T_1 mit Wahrscheinlichkeit p und S_1 mit q, so ergeben sich Erwartungswerte.

$$E_1 = pq\cdot 10 + (1-p)q\cdot 0 + p\cdot(1-q)\cdot 0 + (1-p)(1-q)\cdot 10$$
$$= pq\cdot 10 + (1-p-q+pq)\cdot 10$$
$$= 20pq - 10p - 10q + 10$$
$$E_2 = pq\cdot 4 + (1-p)\cdot q\cdot 1 + p(1-q)\cdot 7 + (1-p)(1-q)\cdot 0$$
$$= pq\cdot 4 + (q-pq)\cdot 1 + (p-pq)\cdot 7$$
$$= -4pq + q + 7p$$

Welches ist die beste Antwort von Spieler I auf q? **(Aufgabentyp: Lineare Optimierung!)**

$$E_1 = \underbrace{(20q-10)}_{>0 \text{ für } q>\frac{1}{2}}\cdot p - 10q + 10$$

Also: Beste Antwort auf $q > \frac{1}{2}$ ist $p = 1$.

Beste Antwort auf $q = \frac{1}{2}$ ist beliebig.

Beste Antwort auf $q < \frac{1}{2}$ ist $p = 0$.

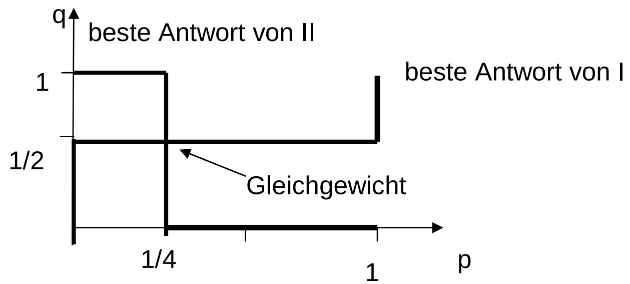
Welches ist die beste Antwort von Spieler II auf p?

$$E_2 = \underbrace{(-4p+1)}_{>0 \text{ für } p<\frac{1}{4}}\cdot q + 7p$$

Also: Beste Antwort auf $p > \frac{1}{4}$ ist $q = 0$

Beste Antwort auf $p = \frac{1}{4}$ ist beliebig.

Beste Antwort auf $p < \frac{1}{4}$ ist $q = 1$.



Nashgleichgewicht in gemischten Strategien: (½, ½) von II

($^1/_4$, ¾) von I

(Gleiche Definition des Nashgleichgewichts wie bei reinen Strategien).

"Seltsame" Eigenschaften dieses Nashgleichgewichts:

Beide Spieler sind indifferent gegenüber Strategiewechsel – ob sie ihre erste oder ihre zweite Strategie wählen oder auch irgendeine Mischung, es wirkt sich nicht auf ihren Erwartungswert aus!

Erwartungswert von Spieler I, wenn Spieler II (½, ½) wählt = 5. (unabhängig von der Strategiewahl von I).
Erwartungswert von Spieler II, wenn Spieler I ($^1/_4$, ¾) wählt = $^7/_4$.

Weiteres Beispiel: "Matching Pennies"

			Spieler I	
			K	Z
			p	1-p
Spieler I	K	q	-1 / 1	1 / -1
	Z	1-q	1 / -1	-1 / 1

Raten: p = ½, q = ½ ist Nashgleichgewicht in gemischten Strategien $\Rightarrow E_1 = E_2 = 0$.
Wenn I p = ½ spielt

$$\Rightarrow E_2 = \begin{cases} 0 & \text{wenn Spieler II K spielt} \\ 0 & \text{wenn Spieler II Z spielt} \end{cases}$$

ebenso für E_1, wenn II q = ½ spielt.
Also Nashgleichgewicht!
(Wir haben so nicht bewiesen, dass dies das **einzige** Nashgleichgewicht ist.)

Allgemein:

			Spieler A	
			Str. 1	Str. 2
			p	1-p
Spieler B	Str. 1	q	a / α	b / β
	Str. 2	1-q	c / γ	d / δ

Gewinn Spieler A
= pqa + (1-p)qb + p(1-q)c + (1-p)(1-q)d
= p[qa – qb + (1-q)c – (1-q)d] + qb + (1-q)d
Beste Antwort von A, wenn B (q, 1-q) wählt:

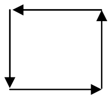
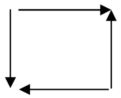
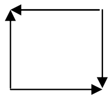
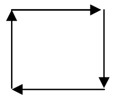
$$p = \begin{cases} 1 \text{ falls } [...] > 0 \\ \text{beliebig falls } [...] = 0 \\ 0 \text{ falls } [...] < 0 \end{cases}$$

Ebenso für Spieler B.
Gleichgewicht in gemischten Strategien erfordert [...] = 0 für beide Spieler, d. h.

$$q = \frac{d-c}{a-b-c+d}, \quad p = \frac{\delta-\beta}{\alpha-\beta-\gamma+\delta}.$$

Nur, wenn beide zwischen 0 und 1, dann Gleichgewicht in gemischten Strategien.
Für 0 < q <1 ist erforderlich: entweder c < d und a > b
oder c > d und a < b.

Entsprechendes gilt für p, d. h. ↓↑ oder ↑↓.
Also:

 oder  oder  oder 

kein Gl. in reinen Str.	2 Gl. in reinen Str.	2 Gl. in reinen Str.	kein Gl. in reinen Str.

D. h. es gibt immer eine **ungerade** Anzahl von Gleichgewichten: entweder **ein** Gleichgewicht in reinen oder gemischten Strategien oder **zwei** Gleichgewichte in reinen **und eins** in gemischten Strategien.

Außerdem:

Die Strategie von Spieler A hängt nur von den Werten von Spieler B ab und umgekehrt. (Siehe beste Antworten.)

Folgerung: Ändern sich die Werte eines Spielers (z. B. weil es neue gesetzliche Regelungen gibt), so ändert sich sein Verhalten nicht, sondern nur das Verhalten seines Gegenspielers.

Probleme mit Nashgleichgewicht in gemischten Strategien

- Warum sollten die Spieler sich an ihre Strategien halten, wenn sie doch indifferent sind?
- Wie soll man sich das Spielen einer gemischten Strategie eigentlich vorstellen?

4. Verallgemeinerungen

(a) Mehr aber endlich viele Strategien, mehr aber endlich viele Spieler

(b) Unendlich viele Strategien

zu (a)

Hierzu haben wir bereits einige Beispiele behandelt

- in Vorlesung
- in Übung (z. B. Schere, Papier, Brunnen)

Eine allgemeine Definition ist bereits in 2. (f) und in 3. gegeben worden. Wir finden ähnliche Ergebnisse wie bei 2 x 2-Spielen:

- Manchmal kein Gleichgewicht in reinen Strategien
- Manchmal mehrere Gleichgewichte in reinen Strategien

Was kann man zeigen?

Satz von Nash:

Jedes Spiel mit einer endlichen Anzahl von Spielern und einer endlichen Anzahl reiner Strategien hat mindestens ein Gleichgewicht in gemischten Strategien.

Bleibt das Problem, was bei mehr als einem Gleichgewicht zu tun ist (später!).

Beispiel: In einer WG mit 3 Personen verabreden sich alle zum gemeinsamen Hausputz. Zum vereinbarten Termin kann jeder der drei kommen (Strategie 1) oder – natürlich mit hervorragender Entschuldigung – wegbleiben (Strategie 0). Putzen kostet **die betreffende Person** 2 Nutzeneinheiten und versorgt **alle** mit einer zusätzlichen Nutzeneinheit.

Wie darstellen? z_i = Strategie von Person i, z_i = 0 oder 1.

Darstellung 1: $\mathbf{u_1(z_1, z_2, z_3) = z_1 + z_2 + z_3 - 2z_1}$

$$= z_2 + z_3 - z_1$$

$$u_2(z_1, z_2, z_3) = z_1 + z_3 - z_2$$

$$u_3(z_1, z_2, z_3) = z_1 + z_2 - z_3$$

Beste Antwort von Spieler 1 auf (z_2, z_3)?

Immer z_1 = 0! D. h., z_1 = 1 ist strikt dominiert.

Das gleiche gilt für Spieler 2 und 3. Also bleibt für alle nur die Strategie z_i = 0 übrig. **(0, 0, 0) ist das einzige Nashgleichgewicht.**

Darstellung 2:

Spieler 3 wählt z_3 = 0

	Spieler 1: 1	Spieler 1: 0
Spieler 2: 1	0 / 0 / 2	1 / -1 / 1
Spieler 2: 0	-1 / 1 / 1	0 / 0 / 0

Spieler 3 wählt z_3 = 1

	Spieler 1: 1	Spieler 1: 0
Spieler 2: 1	1 / 1 / 1	2 / 0 / 0
Spieler 2: 0	0 / 2 / 0	1 / 1 / -1

Wertung Spieler 1

Wertung Spieler 2

Wertung Spieler 3

Auch aus der zweiten Darstellung sieht man, dass $(z_1, z_2, z_3) = (0,0,0)$ das einzige Nashgleichgewicht ist.

Dieses Spiel heißt "Freiwillige Bereitstellung eines öffentlichen Gutes". Wir haben es hier mit einer Verallgemeinerung des Prisoners' Dilemma auf mehr als zwei Spieler zu tun.

Im Beispiel 3 Spieler, in Übung n Spieler.

(b) Unendlich viele Strategien

Beispiel: Voriges Beispiel (freiwillige Bereitstellung öffentlicher Güter) mit

$z_i \in [0,1]$

z_i ist die Zeit, die i für den Hausputz aufwendet. Kosten und Nutzen wie im vorigen Beispiel.

⇒ Nur noch die Darstellung 1 ist möglich, weil wir nicht unendlich viele Strategien an der Seite einer Matrix einzeichnen können.

Ergebnis: Wie vorher: $(z_1, z_2, z_3) = (0,0,0)$ ist einziges Nashgleichgewicht.

Beispiel: Jüdisches Poker (Kurzgeschichte von Ephraim Kishon)

Beispiel: Bertrand-Duopol

Beispiel: Cournotsches Oligopol

5. Kritik des Nashgleichgewichts

Probleme: (i) Manchmal Nichtexistenz von Gleichgewichten bei unendlich vielen Strategien

(ii) Verhaltenskoordination

- bei einem Gleichgewicht
- insbesondere bei einem Gleichgewicht in gemischten Strategien
- bei mehreren Gleichgewichten

(i) ist i. a. nicht gravierend.

(ii) macht das eigentliche Problem!

- Nashgleichgewicht als deskriptive Verhaltenstheorie?

  (unbeschränkte!?) Fähigkeiten der Spieler

- Nashgleichgewicht als normative Theorie

  Woher die Informationen, die zur Koordination auf ein Gleichgewicht führen?

⇒ Notwendigkeit einer **Gleichgewichtsauswahltheorie (Thema im Seminar!)**

6. Spiele in extensiver Form

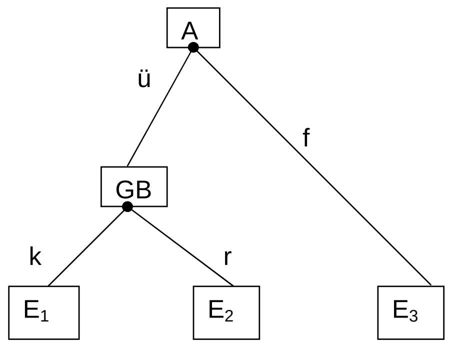
Beispiele, Teilspielperfektheit

(a) Darstellung

Beispiel: Falkland-Krieg (1982)

1. Argentinien entscheidet Überfall ü oder Frieden f
2. GB entscheidet Kampf k oder Resignation r

Neue Darstellung durch Spielbaum (= gerichteter Graph ohne Zyklen)



Bewertung A:	**-2**	**+1**	**0**
Bewertung GB:	-2	-1	0

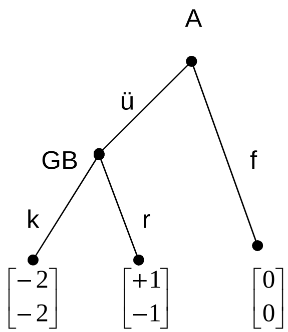
A ist der **Anfangsknoten**

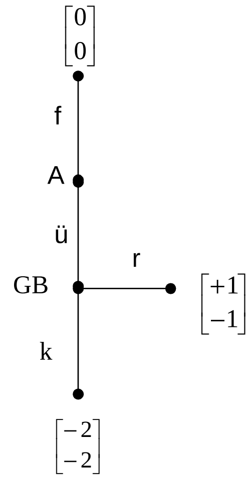
A, GB sind **Entscheidungsknoten**

E_1, E_2, E_3 sind **Endknoten**

$$\left.\begin{array}{l} \text{ü, f} = \text{Entscheidungsmöglichkeiten Argentinien} \\ \text{k, r} = \text{Entscheidungsmöglichkeiten GB} \end{array}\right\} \text{mögliche Züge}$$

Die Darstellung variiert, z. B.





Wenn man den Anfangsknoten bestimmt hat, kommt man in eindeutiger Weise zu jedem der anderen Knoten.

(b) Gleichgewichte in Spielen in extensiver Form

Strategie = vollständiger Verhaltensplan

Somit: Strategien von Argentinien im Beispiel Falkland-Krieg sind:

Str. 1: ü in Knoten A, Str. 2: f in Knoten A

Strategien von GB im Beispiel Falkland-Krieg sind:

Str. I: k in Knoten GB, Str.II r in Knoten GB

Können wir – nachdem wir Strategien in dieser Weise definiert haben – nicht einfach wieder zu Spielen in Normalform übergehen?

Falkland-Krieg

		Argentinien Str. 1 (ü)	Argentinien Str. 2 (f)
GB	Str. I (k)	-2 / -2	0 / 0
	Str. II (r)	1 / -1	0 / 0

⇒ Zwei Gleichgewichte in reinen Strategien

(Str. 1, Str. II) und (Str. 2, Str. I)

(Gleichgewichte in gemischten Strategien: Übung)

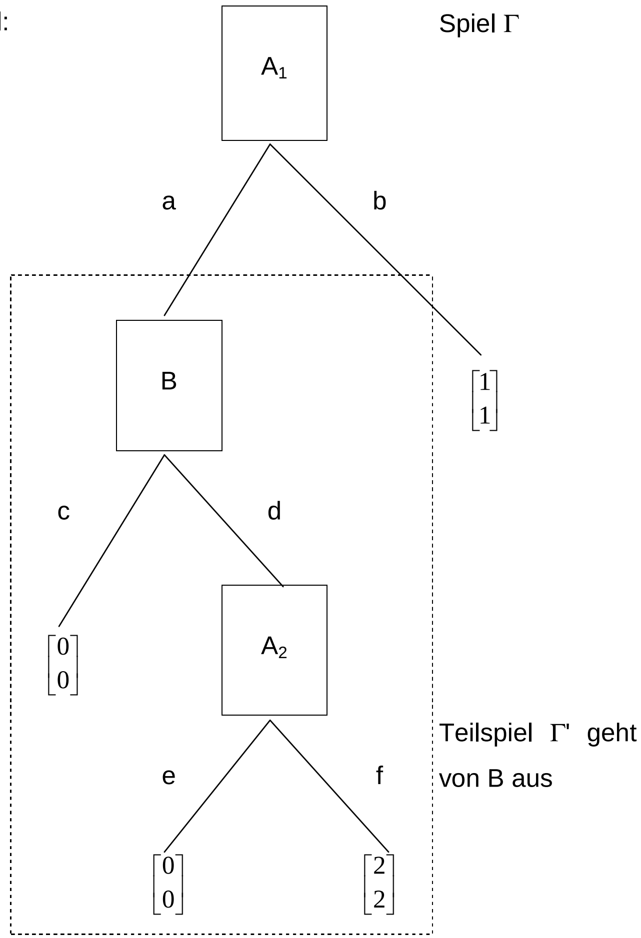
Gleichgewichtsauswahl? Strategie I von GB ist schwach dominiert.

⇒ Gleichgewicht (Str. 1, Str. II) bleibt übrig.

(**Vorläufige**) **Definition:** Ein **Teilspiel** ist der Restspielbaum, der von einem Knoten ausgeht, einschließlich der Bewertungen, die zu den Endknoten des Restspielbaums gehören (= Ein Knoten, der kein Endknoten ist, und alle darauf folgenden Knoten).

Definition: Sei Γ' ein Teilspiel von Γ. Dann induziert jede Strategie s von Γ eine Strategie s' von Γ' dadurch, dass die Züge von S, die sich auf Knoten in Γ' beziehen, übernommen werden.

Beispiel:



Strategie von A z. B. s = (a in A_1, e in A_2).

s induziert Strategie auf Γ': s' = e in A_2.

Definition: Ein Nashgleichgewicht heißt **teilspielperfekt**, wenn es auf jedem Teilspiel ein Nashgleichgewicht induziert.

Methode zum Finden teilspielperfekter Gleichgewichte:

Backward induction = Argumentation vom Ende des Spiels ausgehend.

Die Forderung der Teilspielperfektheit ist die wichtigste Anforderung für die Gleichgewichtsauswahl bei Spielen in extensiver Form.

Teilspielperfektes Gleichgewicht im Beispiel:

In A_2 wählt Spieler A den Zug f.

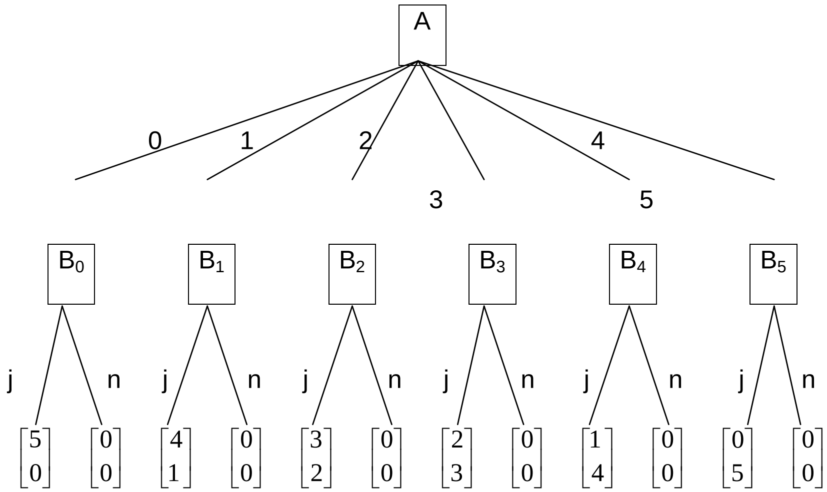
Also wählt Spieler B im Knoten B den Zug d.

Also wählt Spieler A im Knoten A_1 den Zug a.

D. h. A wählt (a, f), B wählt d.

Noch ein Beispiel:

Ultimatum Bargaining: Es sind EURO 5,- zu verteilen (ganze Eurobeträge). Spieler A schlägt die Verteilung vor, Spieler B akzeptiert oder nicht. Wenn B nicht akzeptiert, erhalten beide nichts.



Teilspielperfekte Gleichgewichte:

A wählt 0, B wählt (j, j, j, j, j, j).

A wählt 1, B wählt (n, j, j, j, j, j)

Normativ – deskriptiv: Gibt es Unterschiede?

Nash-Gleichgewicht (nicht teilspielperfekt) ist z. B. A wählt 4 B wählt (n, n, n, n, j, j,)

[Probe: 4 ist As beste Antwort auf Bs Strategie. (n, n, n, n, j, j) ist eine beste Antwort von B auf 4]

Ist aber **keine** Gleichgewichtsstrategie auf Teilspielen, die von B_1, B_2, B_3 ausgehen.

7. Informationsannahmen, allgemeine Definition eines Spiels in extensiver Form

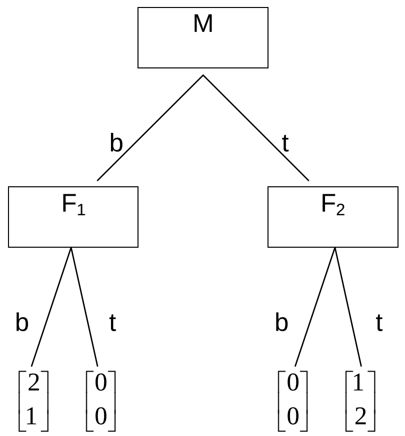
(a) Imperfekte (unvollkommene) Information

Wir haben Spiele in extensiver Form als Spiele in Normalform dargestellt, allerdings unvollkommen, weil die Reihenfolge der Züge verloren ging. Können wir auch Spiele in Normalform als Spiele in extensiver Form darstellen?

		M	
		b	t
F	b	2 1	0 0
	t	0 0	1 2

Kampf der Geschlechter

Entsprechung durch Spiel Γ?



Auszahlung M
Auszahlung F

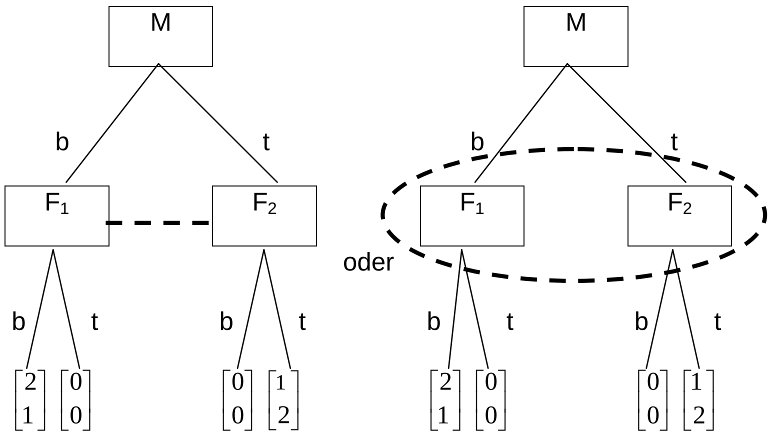
Nein! Γ hat eindeutiges teilspielperfektes Gleichgewicht.

Wo liegt der Unterschied?

Der Unterschied liegt darin, dass im Spiel in Normalform F **nicht weiß**, wie M sich entschieden hat, im Spiel Γ in extensiver Form **weiß** sie es.

Verallgemeinerung der Spiele in extensiver Form: Wir lassen zu, dass die Spieler manchmal nicht wissen, in welchem Knoten sie sich befinden. Man nennt ein solches Spiel ein Spiel mit **imperfekter** (**unvollkommener**) Information. Der jeweilige Informationsstand eines Spielers wird durch eine **Informationsmenge** oder einen **Informationsbezirk** = Menge der Knoten, in denen er sich befinden kann, beschrieben.

Kennzeichnung von Informationsbezirken im Spielbaum:



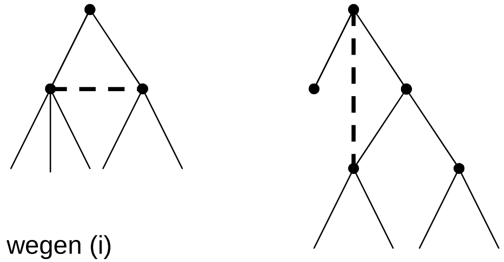
Bestehen alle Informationsmengen aus einem Knoten, so spricht man von einem Spiel mit **perfekter** (**vollkommener**) Information.

Anforderungen an Informationsmengen:

(i) "Gleiche" (und gleich viele) Kanten (= Züge = Entscheidungsmöglichkeiten) aus jedem Knoten eines Informationsbezirks

(ii) Keine aufeinander folgenden Knoten in einer Informationsmenge.

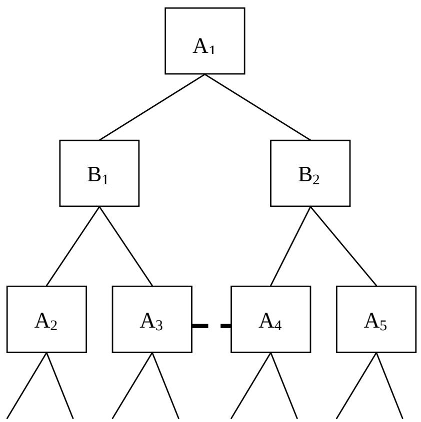
Also verboten:



wegen (i)

wegen (ii)

Nicht verboten ist folgende Situation:



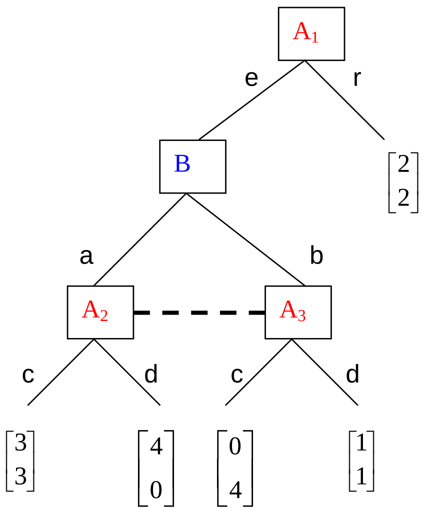
Man nennt dieses ein Spiel **mit unvollkommener Erinnerung (imperfect recall)**. Wir werden im Weiteren solche Spiele allerdings nicht betrachten.

Mit der Verallgemeinerung neue Anforderungen an Teilspiele:

- Ein Teilspiel beginnt mit einer Informationsmenge, die nur einen Knoten enthält.
- Ein Teilspiel enthält von jeder Informationsmenge entweder alle oder keinen Knoten.

Hinweis: Es ist möglich, dass ein Spiel keine echten Teilspiele hat, wie die Übertragung "Kampf der Geschlechter" in die extensive Form zeigt.

Weiteres Beispiel (Prisoners' Dilemma mit Outside Option):



Nur ein echtes Teilspiel (das von B ausgeht)
= Prisoners' Dilemma

Einziges Nashgleichgewicht im Teilspiel: (b, d) $\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist Auszahlung

Also wählt A im Knoten A_1 den Zug r.

Gleichgewichtsstrategien: (r, d) von A und b von B.

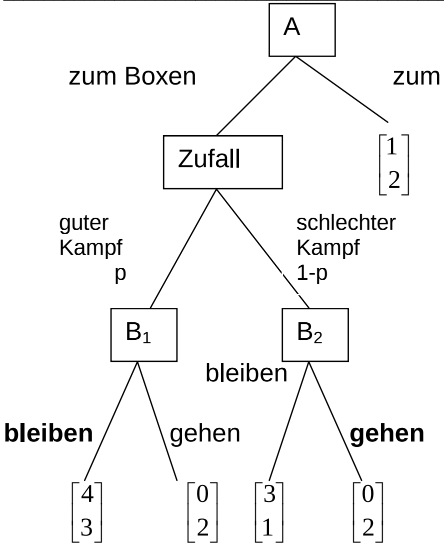
(b) Die "Natur" als Spieler

Manchmal treten in einem Spiel Zufallsereignisse auf, z. B.

- "Mensch ärgere dich nicht": Zufall bestimmt die Augenzahl des Würfels; der Spieler bestimmt, welchen seiner Steine er um die Zahl vorwärtsbewegt.
- "Partnerwahl": Der Zufall bestimmt, welche potentiellen Partner sich treffen; die Spieler bestimmen, ob sie eine Partnerschaft eingehen.
- "Boxen oder Tanzen": A entscheidet, ob zum Boxen oder zum Tanzen. Zufall entscheidet, ob guter Kampf oder nicht. B entscheidet, ob bleiben oder gehen.

Stellen Sie das Spiel „Partnerwahl“ zwischen zwei Männern M1 und M2 und einer Frau F dar. Nehmen Sie dabei der Einfachheit halber an, dass nur einmal per Zufall ein Paar sich trifft. Wählen Sie selbst Bewertungen der Endzustände und bestimmen Sie das teilspielperfekte Gleichgewicht.

Die folgende Darstellung bezieht sich auf das zweite Beispiel.



Der Zufallsspieler hat keine Wahl, er entscheidet nach vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten, hier mit p für "guter Kampf", 1 – p für "schlechter Kampf".

Analyse: In B_1 entscheidet B für bleiben, in B_2 für gehen.

$\Rightarrow$ Wenn A "Boxen" entscheidet, dann hat er einen Erwartungswert p • 4 + (1 - p) • 0 = p • 4. Vergleich mit Wert von Tanzen = 1.

(c) Allgemeine Beschreibung eines Spiels in extensiver Form

1. Graph B: Bestehend aus Knoten und Kanten, zusammenhängend, schleifenlos, endlich, (Spielbaum) mit ausgezeichnetem Punkt (Anfang).
2. Partie: Kantenzug vom Anfangs- bis zu einem der Endpunkte. Partien und Endpunkte sind eindeutig zugeordnet.
3. Entscheidungsknoten: alle Knoten, die keine Endpunkte sind: D(B).

4. Spielzerlegung in fremde disjunkte Mengen:

   D(B) = $P_0 + P_1 + \ldots + P_n$

   P_0 = Zufallszüge,

   P_1 = Spieler 1 entscheidet,

   $\vdots$

   P_n = Spieler n entscheidet

5. Informationszerlegung: $P_i = I_i^1 + \ldots + I_i^{M^i}$

   i weiß nicht in welchem Knoten der M^i Informationsbezirke $\mathbf{I_i^j}$ er sich jeweils befindet. Das erfordert: Aus jedem Knoten von $\mathbf{I_i^j}$ gleich viele Kanten, $\mathbf{I_i^j}$ enthält von jeder Partie höchstens einen Knoten.

6. Zugzerlegung: $\mathbf{Z}\left(\mathbf{I_i^j}\right) = \textbf{mögliche Züge in } \mathbf{I_i^j}$

   = Kanten aus jedem Knoten von $\mathbf{I_i^j}$

7. Zufallsspieler: hat nur einelementige Informationsmengen, Zugwahl durch Wahrscheinlichkeit vorgegeben.

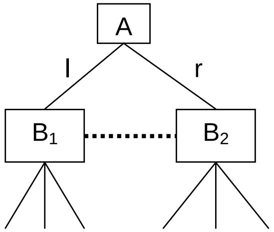
8. Bewertung: E(B) = Menge der Endpunkte

   Für jeden Endpunkt einen Nutzen – oder Auszahlungsvektor $(u_1(e),\ldots,u_n(e))$.

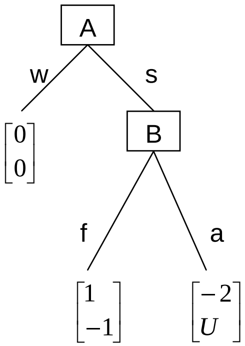
8. Unvollständige Information

Bisher: Imperfekte (unvollkommene) Information:

Spieler B weiß nicht, wie A gezogen hat.



Jetzt: Ein Spieler weiß andere Dinge nicht, z. B. kennt A die Bewertung von B (teilweise) nicht.



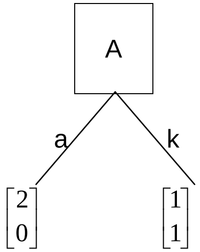
Ehepaar (A, B).
s = Scheidung,
w = weiter so

f = friedliche Reaktion
a = aggressive Reaktion

U = Nutzen von B

Oder: A weiß nicht, ob B noch einen Zug machen kann.

Spiel Γ:

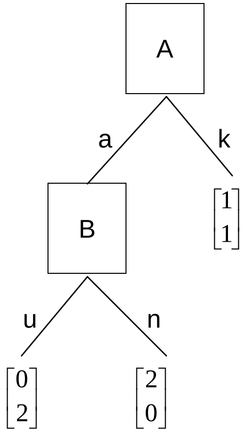


A, B sind Politiker

a = A beschuldigt B zwei Tage vor der Wahl eines Vergehens

k = A tut das nicht

Spiel Δ:



A weiß nicht, welches Spiel relevant ist.

u = B beweist seine Unschuld

n = B reagiert nicht

Viele weitere Beispiele dieser Art!

Wie behandeln?

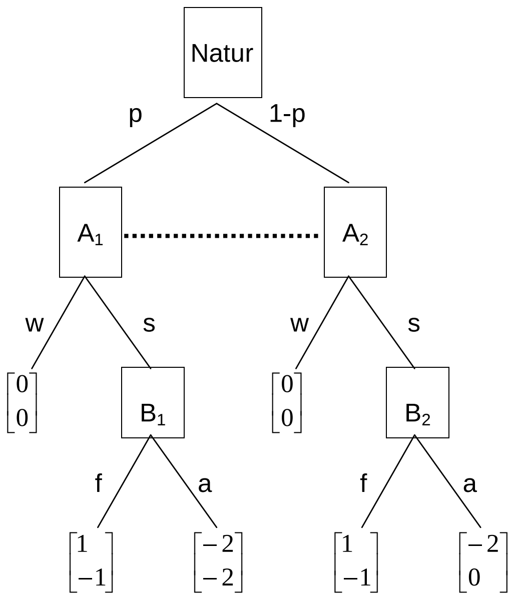
Vorschlag von Harsanyi, solche Situationen auf Spiele mit imperfekter Information zurückzuführen:

Annahme:

(i) Es gibt verschiedene Spielertypen.

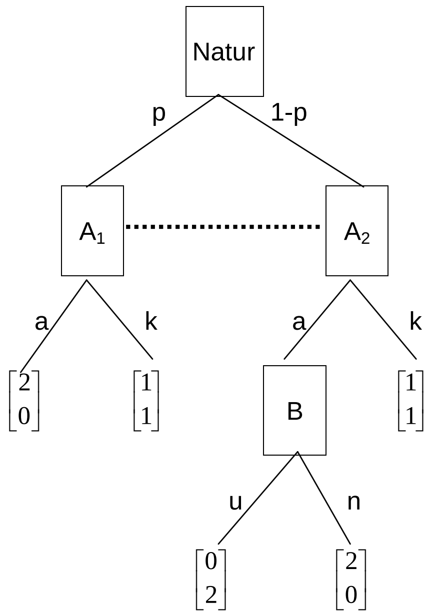
(ii) Die Natur entscheidet mit einem Zufallszug über die Auswahl der Spiele oder der Spielertypen. Die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Typen gewählt werden, sind bekannt.

In den obigen Beispielen:



Ehebeispiel (zwei Typen von B):

Dabei wird zusätzlich angenommen, dass p bekannt ist und dass U den Wert –2 mit der Wahrscheinlichkeit p annimmt und 0 mit der Wahrscheinlichkeit 1 – p.



Politikerbeispiel (zwei Spiele oder zwei Typen von B):

Wieder wird zusätzlich angenommen, dass p und 1-p bekannt sind.

Weiteres wichtiges Beispiel für Spiele mit unvollständiger Information (incomplete information): **Auktionen**

Ein Objekt wird versteigert, das für den Bieter i den Wert w_i hat. i kennt diesen Wert, die anderen Spieler kennen ihn nicht, aber sie kennen die Verteilung von w_i. Alle wissen, dass diese Verteilung allen bekannt ist und alle wissen, daß alle wissen, dass diese Verteilung allen bekannt ist, usw. (common knowledge).

Auktionen können nach unterschiedlichen Regeln ablaufen, z. B. müssen bei einer **"sealed-bid, first-price auction"** alle Bieter Gebote b_i in versiegelten Umschlägen abgeben. Der Bieter mit dem höchsten Gebot erhält das Objekt, er muss den Preis zahlen, den er angeboten hat.

Wir haben es bei Auktionen normalerweise mit Spielen mit unendlich vielen Strategien zu tun, die wir nicht in Form eines Spielbaums darstellen können. Ausnahme: w_i und b_i nehmen nur endlich viele diskrete Werte an.

Kann man bei Spielen mit unvollständiger Information die Züge seiner Mitspieler beobachten, so sagen diese häufig etwas über die Werte der Mitspieler aus (oder über die Form des Spielbaums). In einer ansteigenden (sogenannten englischen) Auktion kann man z. B. annehmen, dass $w_j > b_j$ gilt, wenn ein Bieter j das Gebot b_j macht. Jeder beobachtbare Zug ist gleichzeitig ein **Signal**. Da Spieler dies wissen, berücksichtigen sie es bei ihrer Zugwahl (strategische Signale).

9. Wozu nützt Spieltheorie?

Noch einmal: Spieltheorie ist normative Theorie. Sie **definiert rationales Verhalten** und sagt damit aus, wie sich Entscheidungsträger in gewissen Situationen verhalten sollten. Die moderne Mikroökonomie ist zu einem großen Teil auf der Basis der Spieltheorie aufgebaut.

Spieltheorie ist ein Werkzeug bei der Untersuchung von

- Oligopolen
- Markteintritt
- vertikale Beziehungen
- Verhandlungen
- Regulierung
- externe Effekte, öffentliche Güter
- Steuerhinterziehung
- Wettbewerb zwischen Ländern mit Zöllen, Steuern, Subventionen, Standards
- Kriminalität
- Kooperation
- Parteienwettbewerb
- Evolution

.
.
.

Probleme der Anwendung der Spieltheorie:

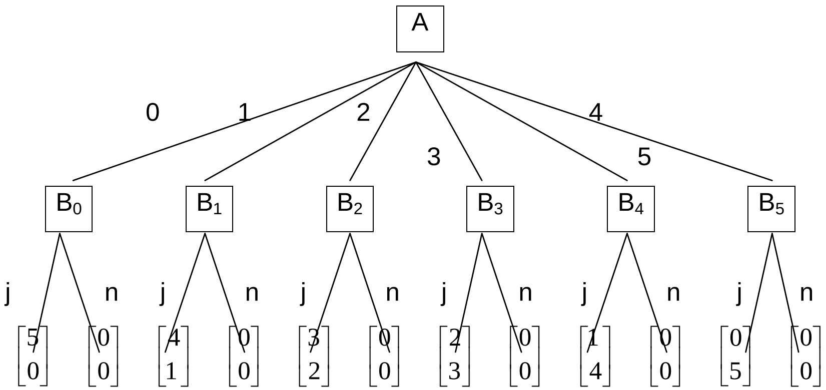
- Wie überträgt man eine "reale Situation" in ein Modell? Welches sind die wesentlichen Eigenschaften (Strukturen) einer realen Situation, die wir im Modell wiederfinden müssen? Insbesondere: (i) Spielbaum (ii) Bewertungen.

- Was taugt die Spieltheorie als deskriptive Theorie?

Die erste Frage ist die fundamentale Frage jeglicher Wissenschaft, sogar jeglichen Nachdenkens über irgendein Problem: wir haben natürlich **nie** die Welt im Kopf, sondern **immer** ein vereinfachtes Abbild.

Also zur zweiten Frage, soweit sie über die erste hinausgeht. Drei Beispiele:

(1) Das Ultimatum-Spiel



Spieltheorie: Teilspielperfekte Gleichgewichte 1. A wählt 0, B wählt die Strategie (j,j,j,j,j,j). 2. A wählt 1, B wählt (n,j,j,j,j,j).

Experiment: Die meisten A wählen 2.

Konsequenz: Entweder ist die Modellierung falsch oder die Spieltheorie als deskriptive Theorie unbrauchbar.

Wenn wir die gesamte Entscheidungstheorie nicht aufgeben wollen, dann müssen wir annehmen, dass die Auszahlungen **nicht** die internen Bewertungen spiegeln. Akzeptieren wir das, so ist das Ultimatum-Spiel **kein Beweis** für die Unbrauchbarkeit der Spieltheorie als deskripte Theorie.

(2) Schach

Es ist offensichtlich, dass Schach ein endliches Spiel ist (wenn auch sehr groß), dass wir deshalb die teilspielperfekten Gleichgewichte durch backward induction finden können. Alle diese Gleichgewichte haben die gleiche Bedeutung: entweder zeigen alle "Sieg für weiß" oder alle "Sieg für schwarz" oder alle "Remis".

Aber wir kennen diese Gleichgewichte nicht: wir sind nicht mit den Fähigkeiten ausgestattet, die uns die Spieltheorie unterstellt.

Wir sind vielmehr mit sehr unterschiedlichen Fähigkeiten ausgestattet, was die Analyse beim Schachspiel anbelangt!

(Ist es im Schachspiel **gegen jeden Gegner** optimal, die Gleichgewichtsstrategie zu spielen?)

(3) Das Zahlenwahl-Spiel

Sie und n – 1 andere Mitspieler sollen eine Zahl zwischen 0 und hundert nennen. Derjenige, dessen Zahl am nächsten an 2/3 des Durchschnitts aller genannten Zahlen liegt, gewinnt EURO 1000,-.

Analyse: Angenommen, alle ihre Mitspieler wählen irgendwelche reine oder gemischte Strategien, die zusammen den Mittelwert m ergeben. Dann sollten Sie z wählen mit

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{(n-1)m+z}{n}=z \Rightarrow z=\frac{(n-1)m}{\frac{3}{2}n+1}\approx\frac{2}{3}m \text{ für große } n.$$

Daraus folgt erstens, dass beste Antworten reine Strategien sind und zweitens, dass nur $z_j = 0$ für alle Spieler ein Gleichgewicht darstellt.

Was wird beobachtet? Wie sollte jemand spielen, der die Analyse nachvollzogen hat?

Fast alle Spieler nennen Zahlen über Null. Gewinnen kann man mit einem Wert in der Nähe von 15. Also sollte auch jemand, der das Gleichgewicht kennt, anders spielen!

Fazit: - Spieltheorie kann reales Verhalten nicht völlig beschreiben. Wie groß die Abweichungen sind, hängt vom Einzelfall ab. Die Abweichungen werden normalerweise mit zunehmender Einsicht in die Situation (wiederholtes Spiel) geringer.

- Spieltheorie liefert uns einen Vergleichsmaßstab für reales Verhalten, die Unterschiede machen uns aufmerksam auf Defizite der Spieler bei der Analyse der Situation oder auch auf nicht adäquate Modellierungen. Zu diesen nicht adäquaten Modellierungen können auch die Konzepte der Spieltheorie gehören.